

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ2Γ(α)

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 10 Μαΐου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη (βλέπε σχολικό σελ. 135)

A2. Σχολικό σελίδα 97.

A3. Για την $f(x) = \alpha^x$ έχουμε:

- πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$
- σύνολο τιμών το $B = (0, +\infty)$.

Για την $g(x) = \log_\alpha x$, με $0 < \alpha \neq 1$ έχουμε:

- πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$
- σύνολο τιμών το $B = \mathbb{R}$

- A4.**
- α. ΛΑΘΟΣ
 - β. ΛΑΘΟΣ
 - γ. ΛΑΘΟΣ
 - δ. ΣΩΣΤΟ
 - ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε $f(x) = 2\sin 2x - 1$

B1. Αφού $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow$

$$-2 \leq 2\sin 2x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-3 \leq 2\sin 2x - 1 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0). \text{ Έτσι έχουμε } \boxed{\max f = 1}, \boxed{\min f = -3}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ2Γ(α)

Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{T = \pi}$

B2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}}$$

Αφού $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$-\frac{\pi}{6} \leq k\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$$

- $k = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

- $k = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$

Αφού $0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{6} \leq k\pi \leq \frac{13\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{13}{6} \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$$

- $k = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$

- $k = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$

Έτσι η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία: $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $B\left(\frac{7\pi}{6}, 0\right)$, $\Gamma\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ και $\Delta\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$.

B3. Υπολογίζουμε:

- $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

- $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 \cdot \sin \frac{5\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} - 1 = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\sqrt{3} - 1$

$$\bullet \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\bullet \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$\text{Έτσι } K = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot (-\sqrt{3}-1) + 0}{1 - (-1)} = \frac{-(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{-(\sqrt{3}^2 - 1^2)}{2} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$\bullet \quad P(-2) = 24 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta + \gamma = 24 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta + \gamma = 32 \quad (1)$$

$$\bullet \quad P(0) = 8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 8}$$

$$\bullet \quad P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = -1 \quad (2)$$

$$\text{Έτσι } \begin{cases} (1) \Rightarrow 4\alpha - 2\beta = 24 \\ (2) \Rightarrow \alpha + \beta = -9 \end{cases} \cdot 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 24 \\ 2\alpha + 2\beta = -18 \end{cases} + \{6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$(2) \Rightarrow 1 + \beta + 8 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -10}$$

Γ2. α) Το πολυώνυμο γίνεται: $f(x) = x^3 + x^2 + 10x + 8$. Με το σχήμα Horner για $x = 1$ βρίσκουμε:

1	1	-10	8	x=1
	1	2	-8	
1	2	-8	0	

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ γίνεται $(x-1)(x^2 + 2x - 8) = 0$, επομένως $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-4$. Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι $-4, 1, 2$.

β) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) < 0$.

Η ανίσωση $f(x) < 0$ αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 2)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ2Γ(α)

x	$-\infty$	-4	1	2	$+\infty$
x-1	-		-	0	+
$x^2 + 2x - 8$	+	0	-		+
f(x)	-	0	+	0	+

Γ3. $\frac{x+4}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)+f(-x)-18}$ (1)

Είναι $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 10(-x) + 8 = -x^3 + x^2 + 10x + 8$, επομένως

$$f(x) + f(-x) - 18 =$$

$$= x^3 + x^2 - 10x + 8 - x^3 + x^2 + 10x + 8 - 18 = 2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1).$$

Πρέπει $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4, 1, 2$ και

$f(x) + f(-x) - 18 \neq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$, επομένως συνολικά οι περιορισμοί είναι $x \neq -4, -1, 1, 2$ η ανίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{x+4}{f(x)} - \frac{2}{f(x)+f(-x)-18} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^3+x^2-10x+8} - \frac{2}{2(x^2-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+4}{(x+4)(x-1)(x-2)} - \frac{2}{2(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-(x-2)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0.$$

Είναι $x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$, $x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	$-\infty$	-4	-1	1	2	$+\infty$
x-1	-		-		-	0
x+1	-		-	0	+	
x-2	-		-		-	0
Γ	-		-	0	+	0

Η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (1, 2)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Είναι $f(\ln x) = 2^{\ln x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln x} = 2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}}$, με $x > 0$.

β) Πρέπει $x > 0$ και $f(\ln x) > 0$, οπότε $2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}} > 0 \Leftrightarrow (2^{\ln x})^2 - 1 > 0$ (αφού είναι $2^{\ln x} > 0$)
 $(2^{\ln x} - 1) \cdot (2^{\ln x} + 1) > 0$ και επειδή είναι $2^{\ln x} + 1 > 0$ για κάθε $x > 0$, τότε
 $2^{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^{\ln x} > 1 \Leftrightarrow 2^{\ln x} > 2^0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$.
 Οι ανισώσεις $x > 0$ και $x > 1$ συναληθεύουν όταν $x \in (1, +\infty)$, επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $(1, +\infty)$.

Δ2. Είναι $h(x) = \ln \frac{3}{x} + \ln \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right) =$
 $= \ln \frac{3}{x} + \ln \frac{x+1-1}{x+1} + \ln \frac{x+2-1}{x+2} + \ln \frac{2+x}{2} =$
 $= \ln \frac{3}{x} + \ln \frac{x}{x+1} + \ln \frac{x+1}{x+2} + \ln \frac{x+2}{2}$.
 Για $x > 0$ είναι $\frac{3}{x} > 0$, $\frac{x}{x+1} > 0$, $\frac{x+1}{x+2} > 0$, $\frac{x+2}{2} > 0$,
 οπότε $h(x) = \ln \left(\frac{3}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{2}\right) = \ln \frac{3}{2}$.

Δ3. Για $x > 1$ έχουμε

$$h(x) = g(x), \ln \frac{3}{2} = \ln(f(\ln x)) \Leftrightarrow f(\ln x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{\ln x} - \frac{1}{2^{\ln x}} = \frac{3}{2}.$$

Θέτουμε $2^{\ln x} = \omega > 0$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\omega - \frac{1}{\omega} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\omega^2 - 3\omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \text{ ή } \omega = -\frac{1}{2}$$

Η τιμή $\omega = -\frac{1}{2}$ απορρίπτεται γιατί $-\frac{1}{2} < 0$, οπότε

$$\omega = 2, 2^{\ln x} = 2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Δ4. Είναι $f(1) = 2^1 - \frac{1}{2^1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $f(2) = 2^2 - \frac{1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, τότε

$$\eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - 2 \cdot \frac{15}{4}\ln x}{6 \cdot \frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}\ln^2 x - \frac{15}{2}\ln x}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\frac{3}{2}(\ln^2 x - 5\ln x)}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6}.$$

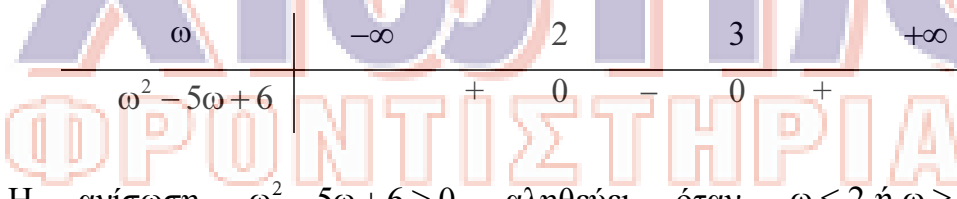
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$, οπότε

$$-1 \leq \frac{\ln^2 x - 5\ln x}{6} \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq \ln^2 x - 5\ln x \leq 6 \text{ με } x > 0 \text{ και έχουμε τις}$$

ανισώσεις:

$$\ln^2 x - 5\ln x \geq -6 \quad (1) \text{ και } \ln^2 x - 5\ln x \leq 6 \quad (2)$$

(1): $\ln^2 x - 5\ln x + 6 \geq 0$, θέτουμε $\ln x = \omega$, οπότε $\omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\omega^2 - 5\omega + 6$ είναι οι $\omega = 2$, $\omega = 3$

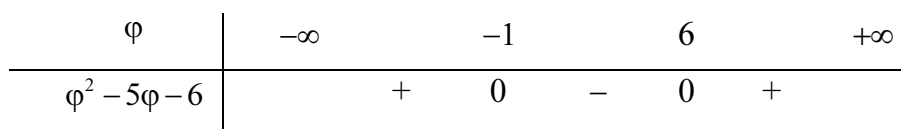


Η ανίσωση $\omega^2 - 5\omega + 6 \geq 0$ αληθεύει όταν $\omega \leq 2$ ή $\omega \geq 3$, οπότε

$$\ln x \leq 2 \text{ ή } \ln x \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x \leq \ln e^2 \text{ ή } \ln x \geq \ln e^3 \Leftrightarrow x \leq e^2 \text{ ή } x \geq e^3 \text{ και αφού πρέπει } x > 0 \text{ τότε } x \in (0, e^2] \cup [e^3, +\infty).$$

(2): $\ln^2 x - 5\ln x - 6 \leq 0$, θέτουμε $\ln x = \varphi$, οπότε $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \leq 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου $\varphi^2 - 5\varphi - 6$ είναι οι $\varphi = -1$, $\varphi = 6$



Η ανίσωση $\varphi^2 - 5\varphi - 6 \leq 0$ αληθεύει όταν $-1 \leq \varphi \leq 6$, οπότε $-1 \leq \ln x \leq 6 \Leftrightarrow$

$$\ln e^{-1} \leq \ln x \leq \ln e^6 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e^6 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{e}, e^6 \right]$$

Οι ανισώσεις (1) και (2) συναληθεύουν όταν $x \in \left[\frac{1}{e}, e^2 \right] \cup [e^3, e^6]$.